2.2 Kształt powierzchni kropli/pęcherzyka – równanie Laplace'a

W reżimie kapilarnym, tj. reżimie, w którym swobodna powierzchnia cieczy lub film cieczy spełnia kryterium Bonda (Eötvösa)

$$Bo = \frac{\rho g L^2}{\gamma_L} << 1 \tag{2.2}$$

gdzie *Bo* – liczba Bonda, lub gdy liniowy rozmiar powierzchni *L* nie przekracza długości kapilarnej κ

$$L << \kappa = \sqrt{\frac{\gamma_L}{\rho g}} \tag{2.3}$$

i nie ma innych zewnętrznych pól sił, które mogą wpływać na kształt powierzchni cieczy, różnica ciśnień po obu stronach powierzchni cieczy lub filmu cieczy (ścian pęcherzyka) jest określona przez średnią krzywiznę powierzchni *H* daną równaniem Laplace'a:

$$\Delta p = \gamma_L \left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_1} \right) = \gamma_L H \tag{2.4}$$

Równanie Laplace'a w powyższej pełnej postaci można wyprowadzić, analizując nieskończenie małe odkształcenie kropli. Załóżmy, że powierzchnia kropli nie musi być kulista, ale powinna charakteryzować się pewną średnią krzywizną

$$H = \left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_1} \right) \tag{RL 1}$$

Ponadto załóżmy, że w wyniku fluktuacji bardzo mała część kropli ulega deformacji w sposób przedstawiony na rysunku 2.1 – oznacza to, że jej objętość wzrasta o infinitezymalnie małą wartość.

Jak pokazano na rysunku 2.1, fluktuacji towarzyszy wzrost pola powierzchni kropli (oznaczonego na rysunku na niebiesko i czarno). Jeżeli element powierzchni jest na tyle mały, że można przyjąć, iż jest płaski, to można napisać:

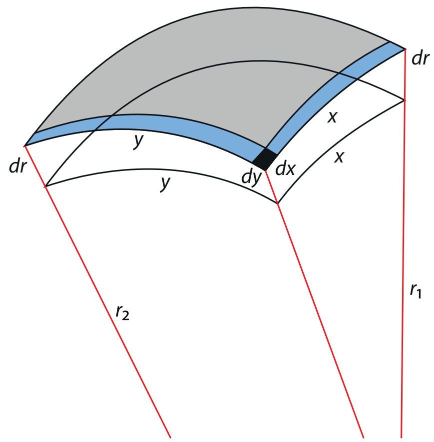
$$A = xy \tag{RL 2}$$

oraz

$$A + dA = (x + dx)(y + dy) \qquad \text{(RL 3)}$$

Ponieważ pole powierzchni elementu *dxdy* jest małe w porównaniu z całym przyrostem pola prostokąta, przyrost ten w przybliżeniu wynosi:

$$dA = xdy + ydx \qquad \text{(RL 4)}$$



Rys. 2.1. Schematyczne przedstawienie nieskończenie małej fluktuacji kropli

co oznacza wzrost energii powierzchniowej o:

$$dW = \gamma_L dA = \gamma_L (xdy + ydx). \qquad \text{(RL 5)}$$

Powyższa praca powierzchniowa jest równoważna pracy objętościowej

$$dW = -pdV = \Delta pxydr \qquad \text{(RL 6)}$$

Wreszcie mamy

$$\gamma_L (xdy + ydx) = \Delta pxydr \qquad \text{(RL 7)}$$

Powyższe równanie zawiera trzy różne różniczki. Można je zastąpić, korzystając z właściwości trójkątów podobnych. Tak więc, ponieważ pary trójkątów o krawędziach x i $x + dx$ są podobne, możemy napisać proporcję